Eigenvalues and Eigenvectors

Διαδικασία υπολογισμού Ιδιοδιανυσμάτων και Ιδιοτιμών
(Διαγωνίσιμοι Πίνακες)

Πίνακας : D= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: (πίνακας διασποράς-συνδιασποράς)

και |D| = ad – bc : (διασπορά μείον τη συνδιασπορά) (α)

Βασική ισότητα: (D– λ I) V = 0 (1)
όπου λ είναι η ιδιοτιμή και V είναι το ιδιοδυάνυσμα και I ο ταυτόσημος πίνακας

η ισότητα αυτή εκφράζεται ως

$$\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

χρησιμοποιώντας τους μηχανισμούς πολλαπλασιασμού και αφαίρεσης πινάκων

$$\left[\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Ο σκοπός είναι να μετρήσουμε τη διασπορά στον Πίνακα D, ενώ παράλληλα μετατρέπουμε τις ποσότητες του D μέσω v_1 και v_2 για να μετρήσουμε τη διασπορά.

Χρησιμοποιώντας την (α) η (3) γίνεται

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \chi\lambda^2 + y\lambda + z = 0 \qquad (4)$$

και οι ρίζες της εξίσωσης μπορούν να βρεθούν από:

$$\lambda = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4xz}}{2\chi} \qquad (5)$$

Αριθμητικό παράδειγμα: D=$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) έχουμε:

$$\lambda^2 - (5+2)\lambda + 5\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (7)\lambda + 6 = 0$$

Ρίζες του πολυωνύμου:

$$\lambda_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = 6 \qquad \text{και} \qquad \lambda_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = 1$$

Για τις δύο ρίζες

A) $\left[\begin{bmatrix} 5-6 & 1 \\ 4 & 2-6 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $-1v_1+1v_2=0$ **και** $4v_1-4v_2=0$

Έχουμε λύση όταν $v_1=1$ και $v_2=1$

B) $\left[\begin{bmatrix} 5-1 & 1 \\ 4 & 2-1 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $4v_1+1v_2=0$ **και** $4v_1+1v_2=0$

Έχουμε λύση όταν $v_1=-1$ και $v_2=4$

Αυτές οι λύσεις είναι το πρώτο (1, 1) και το δεύτερο (–1, 4) ιδιοδιάνυσμα που το καθένα αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ.

Στην περίπτωση, ο D είναι 2×2 και έτσι το πολυώνυμο προς λύση είναι δευτέρου βαθμού και καταλήγει σε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους για να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα.
Αν ο D ήταν ένας Πίνακας 15×15 (ή, όπως συχνά συμβαίνει, 50×50);

Οι Ιδιοτιμές για κάθε ιδιοδιάνυσμα βρίσκονται από τη σχέση

$$L = V'\,RV$$

δηλαδή από τον πίνακα συναφειών, πολλαπλασιασμένο με τον ανάστροφο του Πίνακα ιδιοδιανυσμάτων και κατόπιν, πολλαπλασιασμένο με τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων.

Έστω ότι πίνακας συναφειών είναι ο ακόλουθος:

$$R = \begin{bmatrix} 1.00 & -.953 & -.055 & -.130 \\ -.953 & 1.00 & -.091 & -.036 \\ -.055 & -.091 & 1.00 & .990 \\ -.130 & -.036 & .990 & 1.00 \end{bmatrix}$$

και ότι ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων είναι: $V = \begin{bmatrix} -.283 & .651 \\ .177 & -.685 \\ .658 & .252 \\ .675 & .207 \end{bmatrix}$

τότε **L =** $\begin{bmatrix} -.283 & .177 & .658 & .675 \\ .651 & -.685 & .252 & .207 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00 & -.953 & -.055 & -.130 \\ -.953 & 1.00 & -.091 & -.036 \\ -.055 & -.091 & 1.00 & .990 \\ -.130 & -.036 & .990 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.283 & .651 \\ .177 & -.685 \\ .658 & .252 \\ .675 & .207 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2.00 & .00 \\ .00 & 1.91 \end{bmatrix}$

Οι πληροφορίες του πίνακα συναφειών **έχουν συμπιεσθεί** στις δύο ιδιοτιμές του διαγώνιου πίνακα.

Από τον Πίνακα Ιδιοτιμών, μαζί με τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων, προκύπτει ο Πίνακας των αρχικών φορτίσεων Α (κύριες συνιστώσες) : $A = V\sqrt{L}$

Στο παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} -.283 & .651 \\ .177 & -.685 \\ .658 & .252 \\ .675 & .207 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2.00} & .00 \\ .00 & \sqrt{1.91} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.400 & .900 \\ .251 & -.947 \\ .932 & .348 \\ .956 & .286 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετατροπής (transformation matrix) μπορούμε να περιστρέψουμε τις κύριες συνιστώσες και να καταλήξουμε στους παράγοντες. Για τον υπολογισμό του Πίνακα μετατροπής χρειάζονται τριγωνομετρικοί υπολογισμοί οι οποίοι δεν γίνονται άπαξ, αλλά επαναπροδιορίζονται (iterations) ώσπου να βρεθεί η καλύτερη δυνατή λύση (να αποδοθεί στους παράγοντες το μέγιστο δυνατό ποσοστό της διασποράς των τιμών).

Tabachnick & Fidell (1989)

Factorability of R

"… Kaiser's test of sampling adequacy… is the ratio of the sum of the squared correlations to the sum of the squared correlations plus the sum of the squared partial correlations. The value approaches 1 if the partial correlations are small. Values above .60 are required for a good FA".

"Bartlett's test of sphericity is a notoriously sensitive test of the hypothesis that the correlations in a correlation matrix are zero. … the test is likely to be significant with samples of substantial size even if correlations are very low. Therefore the test is recommended only if there are fewer than, say, **five cases per variable**."